

I-493 - VALIDAÇÃO DE UM MODELO MATEMÁTICO BASEADO NO PRINCÍPIO DA ENTROPIA MÁXIMA PARA A DETERMINAÇÃO DO FATOR DE ATRITO (F) DO ESCOAMENTO FORÇADO.

Alisson Gomes de Moraes⁽¹⁾

Engenheiro Civil, Mestre e Doutor em Engenharia Hidráulica pela Escola Politécnica da USP. MBA em Gerenciamento de Projetos pela Fundação Getúlio Vargas (FGV). Engenheiro da Cia. Saneamento Básico do Estado de São Paulo (SABESP).

Podalyro Amaral de Souza

Engenheiro Civil, Mestre e Doutor em Engenharia Hidráulica pela Escola Politécnica da USP. Professor sênior junto ao Departamento de Engenharia Hidráulica e Ambiental da Escola Politécnica da USP.

Fábio Cunha Lofrano

Engenheiro Civil e Doutor em Engenharia Hidráulica e Ambiental pela Escola Politécnica da USP. Professor doutor junto ao Departamento de Engenharia Hidráulica e Ambiental da Escola Politécnica da USP.

Endereço⁽¹⁾: Rua Costa Carvalho, 300 - Pinheiros – São Paulo - SP - CEP: 05429-900 - Brasil – Tel.: (11) 3388-8624 - e-mail: alisson.moraes@alumni.usp.br

RESUMO

A perda de carga é fundamental à avaliação de quanto um dado sistema hidráulico é eficiente. Segundo a equação de Darcy-Weisbach, ela depende do fator de resistência ao escoamento (f), cuja determinação recai na solução de uma função implícita. Portanto, o objetivo do presente trabalho reside na validação de um modelo alternativo, baseado no princípio da entropia máxima, para a determinação explícita de tal fator. Além de um menor custo computacional, tal modelo atende, ainda, as principais hipóteses físicas do escoamento — por exemplo, com relação ao princípio da aderência e ao perfil de velocidades próximo às paredes. A partir dos dados de Rêgo (2018), que realizou ensaios em 7 condições de vazão para 4 diferentes condições de temperatura, os fatores de resistência calculados segundo o modelo proposto foram validados e contrastados com equacionamentos consagrados. O estudo concluiu que o modelo baseado no princípio da entropia máxima foi o que melhor se ajustou aos dados empíricos, comprovando a sua efetividade quanto à determinação do fator de resistência para escoamentos a diversas situações de temperatura.

PALAVRAS-CHAVE: Modelagem analítica, Princípio da entropia máxima, Fator de resistência, Escoamento, Temperatura.

INTRODUÇÃO

A crescente demanda por energia, associada à necessidade de mudança da matriz energética, requer sistemas cada vez mais eficientes. A menos das instalações de recalque, a principal forma de gasto energético no escoamento de fluidos por tubulações se dá pela transformação da energia (carga) cinética do sistema em energia térmica, a qual é dissipada para o ambiente. A essa transformação dá-se o nome de perda de carga. Uma das equações mais utilizadas para a avaliação da perda de carga é a equação de Darcy-Weisbach, também conhecida como fórmula universal da perda de carga, Eq. (1). Essa equação é a que melhor permite compatibilizar pressupostos oriundos da mecânica dos fluidos, tal qual a teoria da camada limite, às evidências empíricas.

$$\Delta H = f \frac{L U^2}{D 2g} \quad (1)$$

Na qual:

ΔH := perda de carga [L];
 f := fator de atrito ou fator de resistência [-];
 L := comprimento do tubo [L];
 D := diâmetro do tubo [L];
 U := velocidade média do escoamento [$L T^{-1}$]; e
 g := aceleração gravitacional [$L T^{-2}$].

Destaca-se, na Eq. (1), uma quantidade denominada fator de atrito ou fator de resistência, f , para cuja determinação a maioria dos modelos matemáticos mais utilizados é de origem empírica. Este é o caso da equação de Colebrook-White e da equação de Swamee — Eqs. (2) e (3), respectivamente.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{k}{3,71D} + \frac{2,51}{Re\sqrt{f}} \right) \quad (2)$$

$$f = \left\{ \left(\frac{64}{Re} \right)^8 + 9,5 \left[\ln \left(\frac{k}{3,71D} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) - \left(\frac{2,500}{Re} \right)^6 \right]^{-16} \right\}^{1/8} \quad (3)$$

Em que:

Re := número de Reynolds [-]; e
 k := rugosidade hidráulica equivalente das paredes do tubo [L].

Nesse sentido, são meritoriosos os modelos baseados no princípio da entropia máxima, desenvolvidos sobre conceitos advindos da teoria da informação (CHIU; GWO; JYM, 1993). Em função de atender a todos os desideratos referentes ao perfil de velocidade junto às paredes de condutos forçados (MORAES, 2010), o modelo de entropia máxima pode ser empregado em quaisquer regimes de escoamento (laminar, transição e turbulento liso, misto ou rugoso). Sua utilização requer a determinação do chamado parâmetro de entropia, M , conforme as Eqs. (4) e (5).

$$f = \frac{32}{Re_a} \left[\frac{(e^M - 1)^2}{Me^M - e^M + 1} \right] \quad (4)$$

$$M = \ln \left(\frac{Re_a}{435} \right) \quad (5)$$

Nas quais:

Re_a := número de Reynolds aparente [-]; e
 M := parâmetro de entropia [-].

Contudo, sua adoção mais ampla requer validação experimental. Com base nos dados apresentados por Rêgo (2018), é possível conduzir tal validação para a aplicação do modelo de entropia máxima para escoamentos de água a diferentes temperaturas, a fim de que ele possa aprimorar a previsão de gasto energético e, subsidiariamente, a eficiência energética de sistemas hidráulicos em conduto forçado. Portanto, o objetivo do presente trabalho é o de, a partir de dados provenientes de ensaios de escoamento de água em diferentes temperaturas em conduto forçado, validar um modelo matemático baseado no princípio da entropia máxima para a determinação do fator de atrito presente na Equação de Darcy-Weisbach.

METODOLOGIA UTILIZADA

Para a validação do modelo da entropia máxima para escoamentos em diversas condições de temperatura, será utilizado o seguinte método:

1. Obtenção de dados experimentais na literatura;
2. Ajuste do modelo proposto aos dados levantados; e

3. Comparação entre os resultados empíricos e os obtidos pelo modelo proposto e por outros já consagrados.

Dentre os trabalhos levantados, selecionou-se o de Rêgo (2018), que avaliou escoamentos turbulentos a diferentes vazões Q , com temperaturas de $\theta = 30, 35, 40$ e 50 °C em uma bancada de comprimento $L = 0,98$ m, diâmetro de $D = 8$ mm e rugosidade hidráulica equivalente de $k = 0,43$ μm . Os resultados, juntamente com a massa específica, ρ , e viscosidade dinâmica, μ , para água a cada temperatura ensaiada, são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1. Perdas de carga observadas nos experimentos de Rêgo (2018).

θ (°C)	ρ (kg/m^3)	μ ($\text{Pa} \cdot \text{s}$)	Q ($10^{-6}\text{m}^3/\text{s}$)	U (m/s)	ΔH (m)
30	996	8,00	22,33	0,4442	0,050
			28,52	0,5674	0,080
			37,14	0,7389	0,120
			48,37	0,9623	0,190
			61,51	1,2237	0,290
			68,86	1,3699	0,350
			79,79	1,5874	0,450
35	994	7,21	21,96	0,4369	0,050
			28,35	0,5640	0,070
			39,39	0,7836	0,130
			51,46	1,0238	0,210
			65,52	1,3035	0,320
			72,24	1,4372	0,370
			84,90	1,6890	0,480
40	992	6,53	22,07	0,4391	0,050
			30,81	0,6129	0,080
			42,82	0,8519	0,150
			53,44	1,0632	0,220
			62,33	1,2400	0,280
			71,49	1,4222	0,360
			82,21	1,6355	0,460
50	988	5,46	23,80	0,4735	0,050
			29,97	0,5962	0,070
			42,42	0,8439	0,140
			56,06	1,1153	0,220
			68,29	1,3586	0,310
			78,41	1,5599	0,400
			89,58	1,7821	0,490

Os ajustes, tanto do modelo proposto quanto dos modelos consagrados, foram todos realizados por técnica de regressão baseada gradiente descendente. A modelagem do parâmetro M de entropia segue a que foi apresentada por Moraes (2010), empreendida a partir dos resultados de McKeon et al. (2004). O número de Reynolds aparente, Re_a , pode ser calculado conforme a Eq. (6). Tal parâmetro foi inserido por Moraes (2010) de maneira a englobar, sob a forma do equacionamento para tubos lisos, a influência da rugosidade hidráulica equivalente da tubulação sobre o escoamento.

$$Re_a = Re \left(1 + \frac{0,3721}{\sqrt{8}} Re \sqrt{f} \frac{k}{D} \right)^{-1} \quad (6)$$

Para efeito de comparação, a perda de carga, além de ser calculada pelo modelo proposto, baseado no princípio da entropia máxima, também foi determinada através das equações de Colebrook-White e de Swamee — Eqs. (2) e (3), respectivamente. Por fim, confrontaram-se as perdas de carga observadas em modelo físico com aquelas derivadas a partir dos modelos matemáticos citados.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

As perdas de carga calculadas conforme os três modelos citados são dadas pela Tabela 2.

Tabela 2. Cálculo da perda de carga através dos modelos de entropia máxima, Colebrook-White e Swamee.

θ (°C)	Re (-)	Re_a (-)	f (-)				ΔH (m)		
			Exp.	Entropia	C-W	Swamee	Entropia	C-W	Swamee
30	4.425	4.412	0,0406	0,0422	0,0508	0,0389	0,052	0,063	0,048
	5.651	5.630	0,0398	0,0382	0,0463	0,0364	0,077	0,093	0,073
	7.359	7.323	0,0352	0,0346	0,0421	0,0338	0,118	0,143	0,115
	9.584	9.524	0,0329	0,0314	0,0384	0,0314	0,182	0,222	0,182
	12.188	12.090	0,0310	0,0290	0,0354	0,0294	0,271	0,331	0,275
	13.644	13.522	0,0299	0,0279	0,0342	0,0286	0,327	0,400	0,335
	15.810	15.646	0,0286	0,0266	0,0326	0,0275	0,419	0,513	0,433
35	4.818	4.803	0,0420	0,0408	0,0492	0,0381	0,049	0,059	0,045
	6.220	6.195	0,0352	0,0368	0,0447	0,0355	0,073	0,089	0,070
	8.643	8.594	0,0339	0,0326	0,0398	0,0323	0,125	0,152	0,124
	11.291	11.207	0,0321	0,0297	0,0363	0,0301	0,194	0,238	0,197
	14.376	14.240	0,0302	0,0274	0,0336	0,0282	0,291	0,357	0,299
	15.851	15.686	0,0287	0,0266	0,0326	0,0275	0,343	0,420	0,355
	18.629	18.401	0,0269	0,0253	0,0310	0,0264	0,451	0,553	0,470
40	5.336	5.317	0,0415	0,0391	0,0473	0,0370	0,047	0,057	0,045
	7.449	7.413	0,0341	0,0344	0,0419	0,0337	0,081	0,098	0,079
	10.353	10.282	0,0331	0,0306	0,0374	0,0308	0,139	0,169	0,139
	12.921	12.811	0,0312	0,0284	0,0348	0,0290	0,200	0,245	0,205
	15.070	14.921	0,0292	0,0270	0,0331	0,0279	0,260	0,318	0,267
	17.285	17.089	0,0285	0,0259	0,0317	0,0269	0,327	0,401	0,340
	19.877	19.618	0,0275	0,0248	0,0304	0,0260	0,415	0,508	0,434
50	6.854	6.823	0,0357	0,0355	0,0431	0,0345	0,050	0,060	0,048
	8.631	8.582	0,0315	0,0326	0,0398	0,0323	0,072	0,088	0,072
	12.217	12.118	0,0315	0,0289	0,0354	0,0294	0,129	0,157	0,131
	16.145	15.974	0,0283	0,0265	0,0324	0,0274	0,206	0,252	0,213
	19.667	19.414	0,0269	0,0249	0,0305	0,0260	0,287	0,352	0,300
	22.582	22.248	0,0263	0,0239	0,0293	0,0252	0,364	0,445	0,383
	25.799	25.364	0,0247	0,0231	0,0282	0,0244	0,457	0,559	0,484

Os valores de ΔH obtidos através de cada um dos modelos (Tabela 2) foram comparados àqueles determinados experimentalmente (Tabela 1) para cada uma das 4 condições de temperatura ensaiadas por Rêgo (2018), vide a Figura 1.

A baixos valores de ΔH , percebe-se um bom alinhamento entre os três modelos de cálculo e os valores determinados experimentalmente, independentemente da temperatura do fluido. No entanto, uma maior dispersão dos modelos de cálculo ocorre nas situações de maiores vazões que levam, por sua vez, a maiores perdas de carga. É notável que o modelo que pior se ajustou aos dados experimentais tenha sido o mais consagrado dentre os aqui avaliados, a equação de Colebrook-White. Atribui-se esse fato à sua sensibilidade ao valor apontado de rugosidade hidráulica equivalente, k , cujo efeito se torna progressivamente manifesto à medida que a vazão aumenta. Por isso, a despeito de ser uma alternativa simplificada à equação de Colebrook-White, a equação de Swamee apresentou melhor aderência aos dados experimentais, haja visto ser menos sensível ao valor de k adotado. A essa menor sensibilidade ao valor de k também se pode atribuir o sucesso alcançado pelo modelo proposto, baseado no princípio da entropia máxima. Contudo, nessa situação não se trata de uma simplificação da equação de Colebrook-White, mas sim a consideração da rugosidade por meio do número de Reynolds aparente, Re_a .

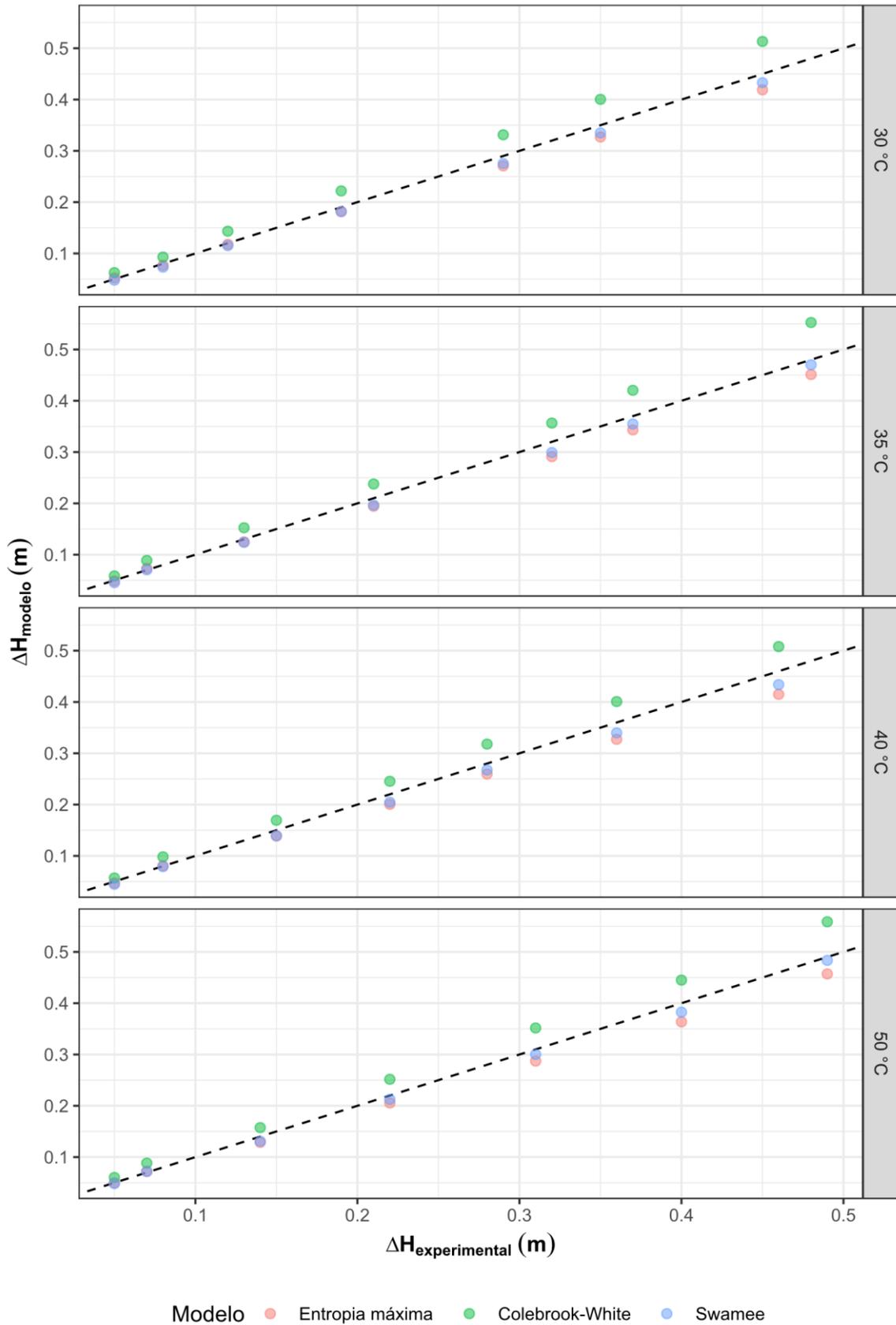


Figura 1. Comparação entre as perdas de carga experimentais e as calculadas segundo os modelos.

Dado que os modelos matemáticos, sobretudo os de origem empírica, dependem, também, da precisão dos dados com os quais foram originalmente calibrados e variados e que podem refletir nas incertezas observadas, pode-se afirmar que as perdas de cargas calculadas a partir do modelo de entropia máxima são condizentes com aquelas advindas do experimento físico. Os desvios podem ser atribuídos à precisão dos instrumentos utilizados nas leituras dos parâmetros envolvidos, sobretudo, na determinação do diâmetro e da rugosidade hidráulica equivalente.

CONCLUSÕES

O objetivo de validação do modelo de entropia máxima para escoamentos turbulentos com diversas condições de temperatura foi atingido; o modelo de entropia máxima é suficientemente acurado para descrever escoamentos de água quente sob pressão.

As equações empíricas estão atreladas aos estudos experimentais que as originaram. Já o equacionamento baseado no princípio da entropia máxima, por sua vez, não sofre de tal limitação. Ele é de caráter analítico e tem o benefício de atender a todos os predicados esperados do perfil de velocidades junto às paredes de um tubo no qual escoar, sob pressão, algum fluido newtoniano. Por isto, recomenda-se sua utilização, em substituição às equações empíricas, como paradigma para futuros trabalhos acadêmicos e aplicações em projeto que requeiram o dimensionamento de tubulações para escoamento de água em regime forçado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. CHIU, C. L.; GWO, F. K.; JYM, M. L. *Application of probability and entropy concepts in pipe-flow study. American Society of Civil Engineers - Journal of Hydraulic Engineering, Reston*, v. 119 (6), p. 742-756, 1993.
2. McKEON, B. J., SWANSON, C. J.; ZARGOLA, M. V.; DORNNELLY, R. J.; SMITS, Alexander J.. Friction factor for smooth pipe flow. *Journal of Fluid Mech. Cambridge: Cambridge University Press*, v 511, p. 41-44, 2004
3. MORAES, A. G. Entropia máxima na modelação do fator de atrito (f) de escoamento forçado. Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Engenharia. São Paulo. 2010.
4. RÉGO, I. L. Estudo experimental da influência da temperatura na perda de carga em tubulações. Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica na área de Termociências pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal. 2018.